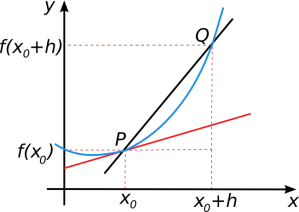
**Cálculo diferencial e interpolación**

**Cálculo diferencial** (derivadas)

* Ao longo deste tema, estudáronse conxuntos progresivamente selectos de funcións.
  + Inicialmente observáronse as funcións. Logo, foi reducido a funcións continuas, sobre as que aplicar propiedades como o teorema de valor medio.
  + Dentro das funcións continuas, un subtipo serán as funcións **derivables** (nun intervalo)
* A **pendente** dunha función nun punto defínese como a inclinación da recta tanxente á súa gráfica. A pendente dá unha idea do rápido que medra a función nese punto.
  + A pendente calcúlase como o límite da pendente das rectas secantes:
  + 
  + Cando h tende a 0, Q aproxímase a P, e no límite temos unha aproximación da pendente da recta tanxente. Con todo, este método é xeralmente innecesario para calcular pendentes.
* Consideremos a **derivada** dunha función nun punto coma o valor da pendente desa función nese punto.
  + 
  + f dise **derivable** en x se existe o límite en x. Será derivable nun intervalo se é derivable para todos os x dese intervalo.
* A partir do límite anterior, podemos coñecer a derivada en moitos casos:
  + Derivada dunha suma de funcións derivables en x: \displaystyle \big(u(x)\pm v(x)\big)' = u(x)'\pm v'(x).
  + Derivada dunha multiplicación de ídem:
  + Derivada da exponencial: \displaystyle \big(\exp(x)\big)' = \exp(x).
* As demais regras necesarias obtéñense a partir da **regra da cadea:** 
  + Desta regra pódense deducir as derivadas daquelas funcións que se poden escribir como **composición doutras.**  Por exemplo,
    - 
    - ex ln a é unha función composta, sendo u(x)=ex e v(x)=ln a.
* A **derivación implícita** emprégase para curvas nas que non é posible facilmente despexar y en función de x.
  + Por exemplo, y=x2 é explícita. Porén, sen(y-x2)=5 é ímplíficta.
  + **Exemplo:** Sexa x2+y2=1 (pódese despexar y pero non se vai facer). Asumimos que y(x) é derivable.
    - Derivamos ambas partes da ecuación. d/dx (x2+y2) = d/dx(1) = 0.
    - d/dx (x2+y2) = d/dx (x2) + d/dx(y2) = 2x + 2\*(y(x))\*y’ = 0
    - y’ = -x/y
    - Analizamos y2 como unha función composta, onde v(x)=x2 e u(x)=y(x).
  + A partir da derivación implícita obtéñense regras de derivación como a do logaritmo ou as do arcoseno, arcotanxente…

**Polinomio de Taylor**

* O **polinomio de Taylor** é unha maneira de aproximar unha función mediante un polinomio. Permite ver como aproximar a función cando se coñecen varios graos da derivada nun só punto.
* Definimos unha función continua nun punto x0 e con derivadas continuas en x0 ata o grao n. Definimos o polinomio de Taylor da función f de grao n arredor do punto x0 como:
* 
* **Exemplo:** y=sen(x) arredor de 0, de grao 4. x0=0
  + y = sen x, y(0) = sen(0) = 0
  + y’ = cos x, y’(0) = cos(0) = 1
  + y’’ = -sen x, y’’(0) = -sen(0) = 0
  + y’’’= -cos x, y’’’(0) = -cos(0) = -1
  + yIV = y, yIV(0) = 0
  + Tn,x0 = 0 + 1(x-0) + 0 -1\*0 +0\* = x -
* Canto maior sexa o grao considerado, maior será a precisión.

**Estimación do erro no polinomio de Taylor**

* O erro cometido ao aproximar unha función f polo osu polinomio de Taylor de grao n arredor de x0 chámase **resto de grao n+1**:
  + Rn+1 = f(x) - Tn(x) = , con C entre x0 e x.
  + Rn+1 = <=
  + Consideramos cal é o valor máximo de f(n+1)(c). Denominamos M a este valor.
* Xeralmente, o valor M de **tolerancia** será aportado polo enunciado.
  + Por exemplo, se obtenemos que Rn+1 = , e o enunciado di que a tolerancia é 10-6. Debemos resolver Rn+1 = <=10-6 para atopar o grao que precisamos.
  + Neste caso, coñecemos que (n+1)! => 3\*106.
  + Por tanteo, obtenemos que n=9.
* **Exemplo exercicio:** Cálculo de en qué intervalo pode substituirse o coseno pola aproximación (1 - x2/2 + x4/24) sen cometer un error maior de 10-4.
  + Calculamos o polinomio de Taylor do coseno arredor de 0. Dado que a aproximación do enunciado posúe grao 4, tomamos grao 5 para ser máis precisos.
    - y = cos0 = 1
    - y’ = -sen0 = 0
    - y’’ = -cos0 = -1
    - y’’’ = sen 0 = 0
    - yiv = cos 0 = 1
    - yv = -sen0 = 0.
  + T5(x) = 1 + 0x -1\*x2/2 + 0x3/6 + 1\*x4/24 + 0\*x5/120 = 1 -x2/2 + x4/24.
    - Coincide coa función dada no enunciado.
  + Ahora. calculamos cando o residuo é menor de 10-4 cando tomamos grao 5.
  + |Rn+1, x0(x)| < tol → |R6,0(x)| < 10-4.
    - Calculamos a derivada sexta, que é [-cos(c)]
  + R6,0(x) = (-cos(c))/6! \* (x-0)6
  + R6,0(x) =
  + Logo, despexamos a x. |x| <

**Derivación numérica** mediante polinomio de Taylor

* O **polinomio de Taylor** permite tamén aproximar a derivada dunha función. Se f é 3 veces continuamente diferenciable, para h>0,
  + f(x+h) = f(x) + h\*f’(x) + h2\*(f’’(c)/2), para c entre x e x+h.
  + Despexando a derivada: 
  + Se f’’(c) está limitada por unha constante, para c entre x e x+h, o erro redúcese linearmente con h, coa **notación de Landau**. Logo, expresamos o erro como O(h).
  + f’(xi) . Para dous puntos xi e xi+1 separados por unha distancia h.
  + Isto defínese como a diferencia finita dividida (DFD) cara adiante de 2 puntos (x e x+h)
* Este método tamén se pode empregar ‘cara atrás’, escribindo a fórmula de Taylor pero para x=xi-1 e logo despexando a derivada.
  + f(xi-1) = f(xi) + f’(xi)\*(xi-1 - xi) + O(h2). (xi-1-xi) = -h.
  + f’(xi) = Esta fórmula defínese como a DFD cara atrás de 2 puntos.
* Finalmente, podemos aproximar a derivada ‘centrada’, restando os polinomios de Taylor para x=xi-1 e x=xi+1.
  + 
    - O(h2) significa que o erro diminúe máis rápido.
* Este mesmo método serve para calcular tamén a **derivada segunda**, se sumamos os polinomios de Taylor para x=xi-1 e x=i+1.
  + 

**Aproximacións da derivada con tres puntos**

* Aumentando o número de puntos involucrado nas fórmulas, aumentamos a precisión da aproximación.
* Por exemplo, se operamos cos polinomios de Taylor para x=x, x=xi+1 e x=xi+2, obtenemos a DFD cara adiante de 3 puntos:
  + 
* Se tomamos os polinomios de Taylor para x=x, x=xi-1 e x=xi-2, obtenemos a DFD cara atrás de 3 puntos:
  + 
* Ambas fórmulas teñen erro O(h2) polo que este erro se reduce máis rapidamente co aumento de h.
  + Aumentando aínda máis os puntos, poderíamos obter fórmulas con erro h3 ou mais. Porén, estas fórmulas de orde superior só se empregan cando estamos seguros da regularidade das funcións que aproximamos.

**Teoremas de Rolle e do valor medio**

* Ter en conta que todas as funcións derivables nun punto son tamén continuas nel.
* **Teorema de Rolle:** Se unha función é continua en [a,b] e derivable en (a,b), e se cumple que f(a)=f(b), existe polo menos un punto en (a,b) no que f’(c)=0.
  + Este teorema pódese empregar para comprobar que a raíz dunha función nun intervalo é única (coñecendo primeiro que existe).
  + Por exemplo: *A raíz de y = cos(x)-x en [0,π] é única*. Coñecemos que isto é certo porque a súa derivada, y’=-sin(x)-1 nons e anula en (0,pi).
    - Primeiro, hai que comprobar se existe a raíz no intervalo.
    - Se y tivese outra raíz nese intervalo, existiría un subintervalo onde f(a)=f(b)=0. Logo, a derivada tería que anularse nese subintervalo
    - Isto só se aplica se a función é **continua** no intervalo..
* **Teorema do valor medio:** Se unha función é continua en [a,b] e derivable en (a,b), existe sempre un punto en (a,b) no que a derivada é igual a .

**Extremos de funcións**

* Un **extremo** é un punto onde a función acada un máximo ou un mínimo.
* O extremo denomínase local se está circunscrito a un contorno do punto.
  + O extremo denomínase absoluto nun intervalo I se é local no contorno C e ese contorno C coincide con I.

**Busca de extremos locais**

* Para buscar extremos locais é preciso calcular os puntos onde a derivada é nula, denominados **puntos críticos.**
* Nestes puntos, calculamos a derivada de menor grao distinta de cero.
  + Se o grao da derivada é par, trátase dun extremo local.
    - Se a derivada é negativa trátase dun máximo, se é positiva un mínimo.
  + Se o grao da derivada é impar, trátase dun **punto de inflexión**.

**Busca de extremos absolutos**

* No caso de funcións continuas cando o intervalo I é pechado, sempre existe algún extremo absoluto.
* Os candidatos posibles serán:
  + Puntos críticos
  + Puntos onde a función non é derivable
  + Extremos do intervalo.